МБОУ «Лицей №16» г.Волгодонска

Решение неравенств методом рационализации

Методика формирования навыка решения задания 15 ЕГЭ профиль

Острик Е.В. – учитель математики

Метод рационализации

Метод рационализации – это мощный инструмент для решения неравенств, которые содержат логарифмические, показательные и иррациональные функции.

Он основан на замене сложной функции более простой, имеющей тот же знак на рассматриваемом промежутке, замене исходного неравенства равносильным ему в области определения.

Это упрощает процесс решения, позволяя свести задачу к решению более простого рационального неравенства методом интервалов.

Формулы рационализации
v: >, <, ≥, ≤

	Исходный	Новый
1	$\mathbf{\log_a f - \log_a g\, v\ 0}$	**(a-1)(f-g) v 0**
2	$\mathbf{a^f - a^g\ v\ 0}$	**(a-1)(f-g) v 0**
3	$\mathbf{\lvert f \rvert - \lvert g \rvert\ v\ 0}$	$\mathbf{(f-g)(f+g)\ v\ 0}$
4	$\sqrt{f} - \sqrt{g}$ **v 0**	**(f-g) v0**

Доказательство:

$$\log_a f - \log_a g > 0 \quad \leftrightarrow (a-1)(f-g) > 0$$

ОДЗ: $a>0$, $f>0$, $g>0$

$$\log_a f - \log_a g > 0$$

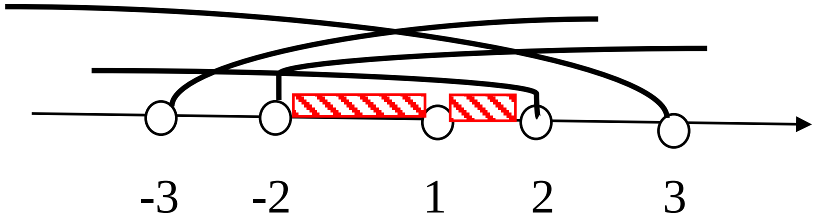
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f > g \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f<g \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1>0 \\ f-g>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0 \\ f-g<0 \end{cases} \end{array}\right.}$$

$$(a-1)(f-g) > 0$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-1>0 \\ f-g>0 \end{cases} \\ \begin{cases} a-1<0 \\ f-g<0 \end{cases} \end{array}\right.}$$

$$1)\ \log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0 \\ 3-x>0 \\ 2-x>0 \\ 2-x\neq 1 \\ x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<3 \\ x<2 \\ x\neq 1 \\ x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases}$



$x \in (-2;1) \cup (1;2)$

1) $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0$

ОДЗ: $x \in (-2;1) \cup (1;2)$

$(\log_{2-x}(x+2)-0)\cdot(\log_{x+3}(3-x)-0) \le 0$

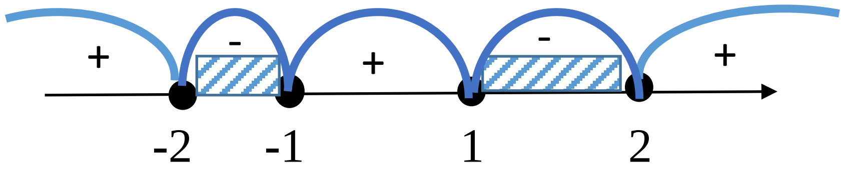
$(\log_{2-x}(x+2)-\log_{2-x}1)\cdot(\log_{x+3}(3-x)-\log_{x+3}1) \le 0$

Метод рационализации: $\log_a f - \log_a g \ge 0 \leftrightarrow (a-1)(f-g) \ge 0$

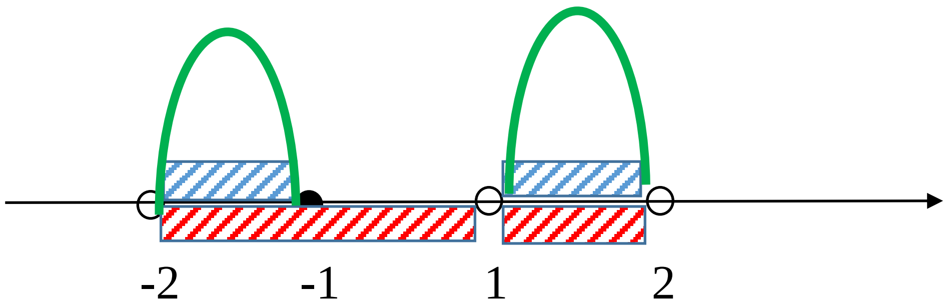
$(2-x-1)(x+2-1)\cdot(x+3-1)(3-x-1)\le 0$

$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x)\le 0$

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)\le 0$



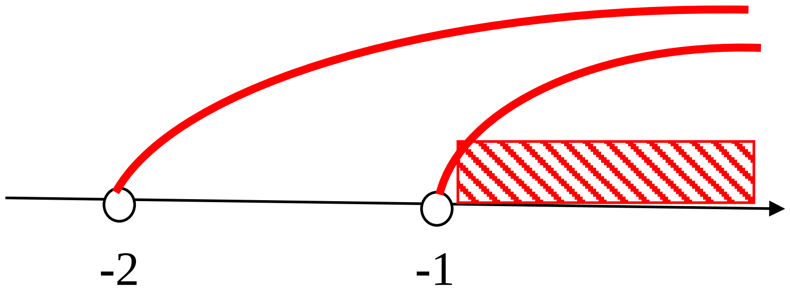
Пересечение с ОДЗ:



Ответ: $x \in (-2;-1] \cup (1;2)$

2) $(\log^2_{0,2}(x+2)-\log_5(x^2 + 4x + 4) + 1)\cdot\log_5(x+1) \leq 0$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0 \\ x+1>0 \\ x^2+4x+4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \\ (x+2)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>-1 \\ x\neq-2 \end{cases} \Rightarrow$



$x \in (-1; \infty)$

2) $(\log^2_{0,2}(x+2)-\log_5(x^2+4x+4)+1)\cdot\log_5(x+1)\le 0$

ОДЗ: $x \in (-1;\infty)$

$$(\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\cdot\log_{\frac{1}{5}}(x+2)-\log_5(x+2)^2+1)\cdot\log_5(x+1)\le 0$$

$$(-\log_5(x+2)\cdot(-\log_5(x+2))-\log_5(x+2)^2+1)\cdot\log_5(x+1)\le 0$$

$$(\log^2_5(x+2)-2\log_5|x+2|+1)\cdot\log_5(x+1)\le 0$$

$$(\log^2_5(x+2)-2\log_5(x+2)+1)\cdot\log_5(x+1)\le 0$$

$$(\log_5(x+2)-1)^2\cdot(\log_5(x+1)-0)\le 0$$

Метод рационализации: $\log_a f - \log_a g \ge 0 \leftrightarrow (a-1)(f-g)\ge 0$

$2)\ (\log^2_{0,2}(x+2)-\log_5(x^2+4x+4)+1)\cdot\log_5(x+1)\leq 0$

$(\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\cdot\log_{\frac{1}{5}}(x+2)-\log_5(x+2)^2+1)\cdot\log_5(x+1)\leq 0$

ОДЗ: $x\in(-1;\infty)$

$(\log^2_5(x+2)-2\log_5|x+2|+1)\cdot\log_5(x+1)\leq 0$

$(\log_5(x+2)-1)^2\cdot(\log_5(x+1)-0)\leq 0$

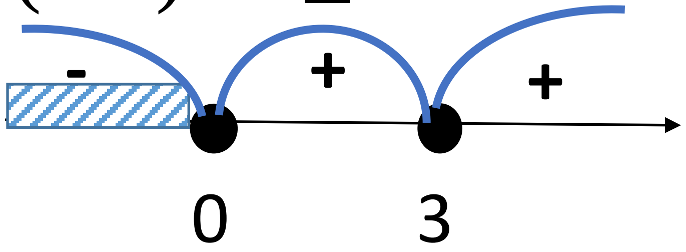
$(\log_5(x+2)-\log_5 5)^2\cdot(\log_5(x+1)-\log_5 1)\leq 0$

Метод рационализации: $\log_a f-\log_a g\geq 0 \leftrightarrow (a-1)(f-g)\geq 0$

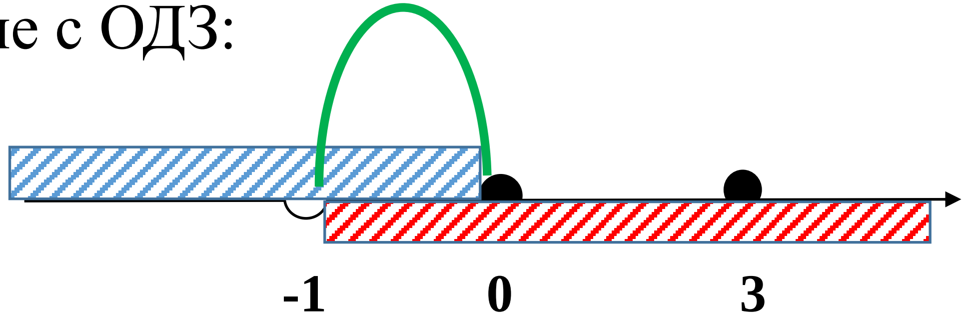
$(5-1)^2(x+2-5)^2(5-1)(x+1-1)\leq 0 \qquad |:64$

$(x-3)^2\cdot x\leq 0$

Пересечение с ОДЗ:



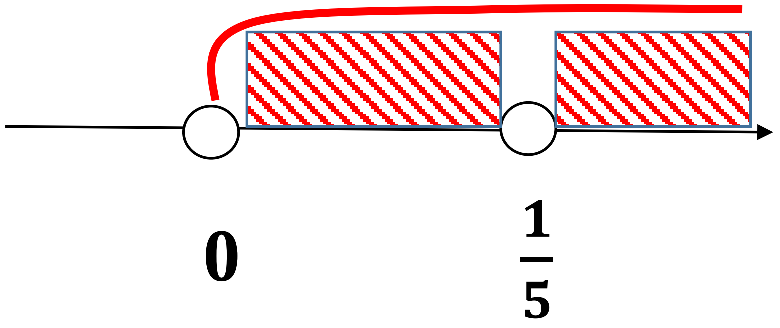
$(-\infty;0]\cup\{3\}$



Ответ: $(-1;0]\cup\{3\}$

3) $\dfrac{\log_3 9x \cdot \log_4 64x}{5x^2 - |x|} \leq 0$

$\begin{cases} 9x>0 \\ 64\,x>0 \\ 5x^2-|x|\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 5x^2-x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0,\ x\neq \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow$



$x \in (0; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; \infty)$

$$\frac{\log_3 9x \cdot \log_4 64x}{5x^2 - |x|} \leq 0$$

$$x \in \left(0;\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};\infty\right)$$

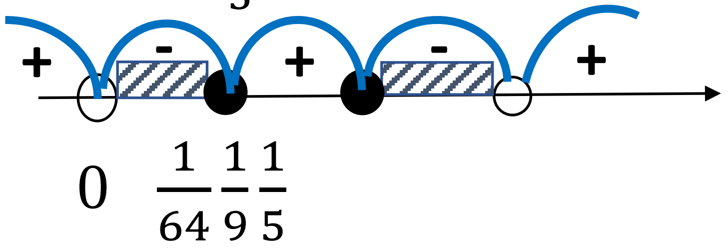
$$\frac{(\log_3 x + \log_3 9) \cdot (\log_4 x + \log_4 64)}{5x^2 - x} \leq 0$$

Метод рационализации: $\log_a f - \log_a g \geq 0 \quad \leftrightarrow (a-1)(f-g) \geq 0$

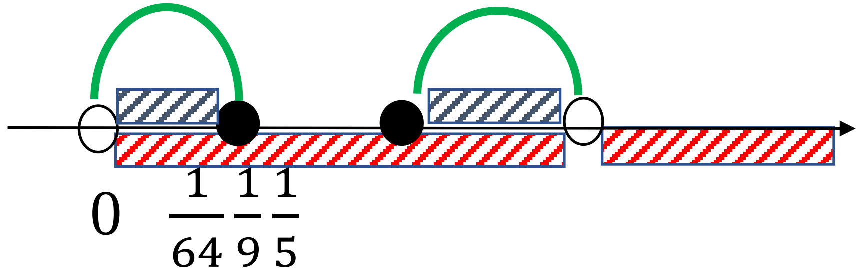
$$\frac{(\log_3 x - \log_3 \frac{1}{9}) \cdot (\log_4 x - \log_4 \frac{1}{64})}{5x^2 - x} \leq 0$$

$$\frac{(3-1)(x-\frac{1}{9})(4-1)(x-\frac{1}{64})}{5x^2 - x} \leq 0 \qquad | :6$$

$$\frac{(x-\frac{1}{9})(x-\frac{1}{64})}{5x(x-\frac{1}{5})} \leq 0 \qquad | \cdot 5$$



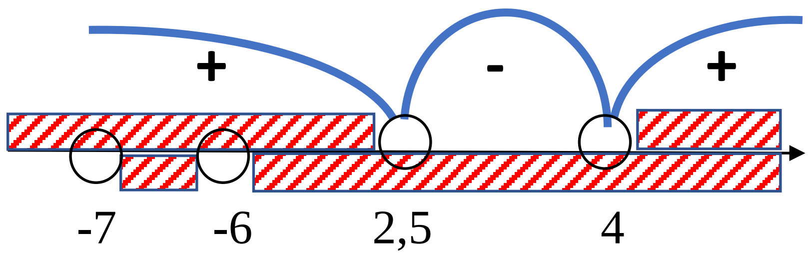
Учет ограничений:



Ответ: $x \in \left(0;\frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9};\frac{1}{5}\right)$

$$4)\ \frac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \le 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-13x+20 \ge 0 \\ x+7>0 \\ \log_3(x+7) \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-4)(x-2,5) \ge 0 \\ x > -7 \\ x \ne -6 \end{cases}$



x∈ (-7;-6) U(-6; 2,5) U (4;∞)

4) $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \leq 0$ x∊ (-7;-6) U(-6; 2,5) U (4;∞)

$$\frac{\log_2(2x^2-13x+20)-\log_2 2}{\log_3(x+7)-0} \leq 0$$

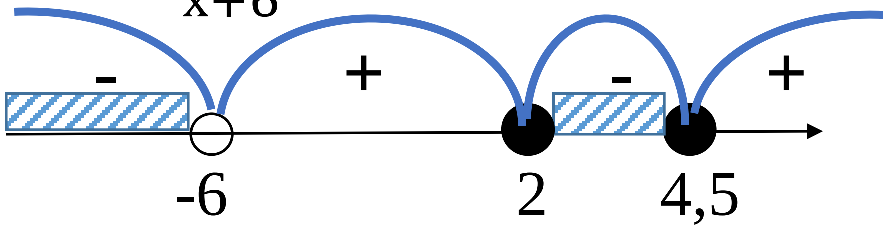
$$\frac{\log_2(2x^2-13x+20)-\log_2 2}{\log_3(x+7)-\log_2 1} \leq 0$$

Метод рационализации: $\log_a f$ - $\log_a g \geq 0 \quad \leftrightarrow$ (a-1)(f-g) ≥ 0

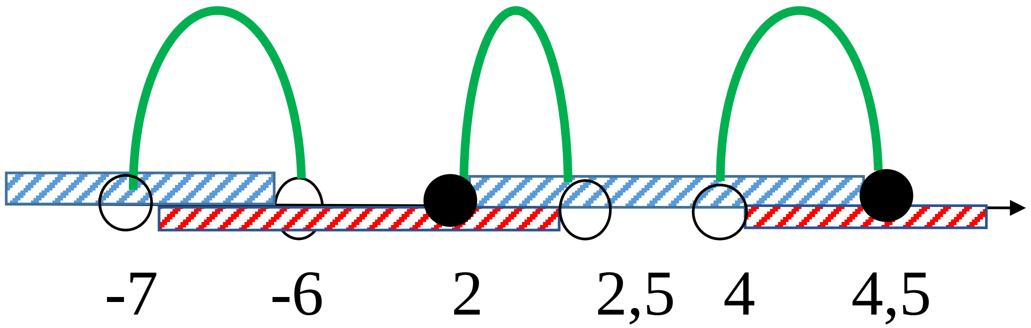
$$\frac{(2-1)(2\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}+20-2)}{(3-1)(\mathrm{x}+7-1)} \leq 0 \quad | \cdot 2$$

$$\frac{2\mathrm{x}^2-13\mathrm{x}+18}{\mathrm{x}+6} \leq 0$$

$$\frac{2(x-2)(\mathrm{x}-4{,}5)}{\mathrm{x}+6} \leq 0$$



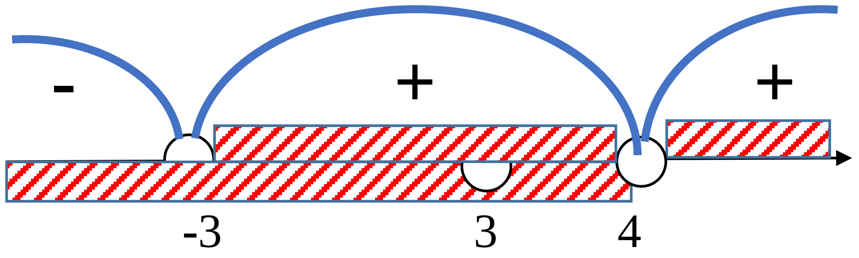
Учет условий:



Ответ: (-7;-6) U [2;2,5) U (4;4,5]

$$5)\ \log_{4-x}\frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2$$

ОДЗ: $\begin{cases} 4-x>0 \\ 4-x\neq 1 \\ \dfrac{x+3}{(x-4)^2}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x\neq 3 \\ x= -3;\ x\neq 4 \end{cases}$



x∈ (-3;3) U (3;4)

5) $\log_{4-x}\frac{x+3}{(x-4)^2} \geq -2$ $x \in (-3;3)\cup(3;4)$

$\log_{4-x}\frac{x+3}{(x-4)^2} + 2 \geq 0$ $\log_{4-x}\frac{x+3}{(x-4)^2} + \log_{4-x}(4-x)^2 \geq 0$

$\log_{4-x}\frac{x+3}{(x-4)^2} - \log_{4-x}(4-x)^{-2} \geq 0$

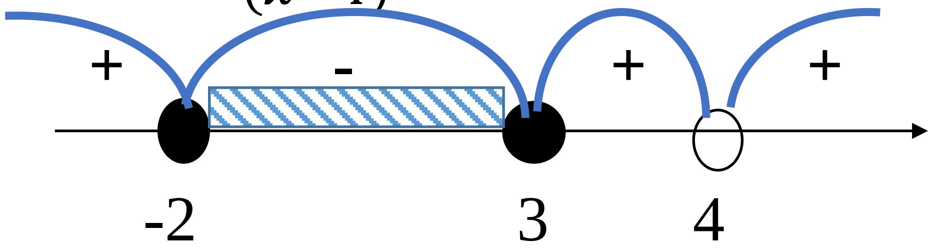
Метод рационализации: $\log_a f$ - $\log_a g \geq 0$ $\leftrightarrow$ $(a-1)(f-g) \geq 0$

$(4-x-1)\left(\frac{x+3}{(x-4)^2} - \frac{1}{(4-x)^2}\right) \geq 0$

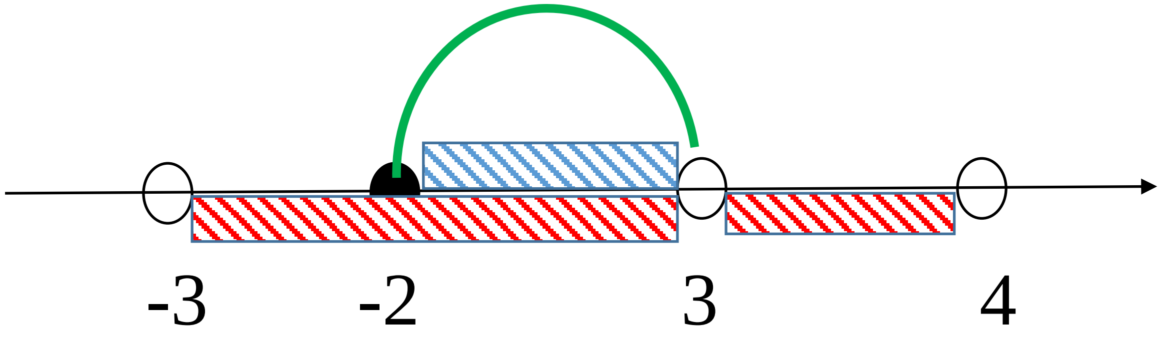
$(3-x)\left(\frac{x+3}{(x-4)^2} - \frac{1}{(x-4)^2}\right) \geq 0$

$(3-x)\frac{(x+2)}{(x-4)^2} \geq 0$

$(x-3)\frac{(x+2)}{(x-4)^2} \leq 0$



Учет ОДЗ:



Ответ: $x \in [-2;3)$

6) $\dfrac{6^x - 4\cdot 3^x}{x\cdot 2^x - 5\cdot 2^x - 4x + 20} \le \dfrac{1}{x-5}$

$\dfrac{3^x(2^x-4)}{2^x\cdot(x-5)-4(x-5)} - \dfrac{1}{x-5} \le 0$

$\dfrac{3^x(2^x-4)}{(x-5)\cdot(2^x-4)} - \dfrac{1}{x-5} \le 0$

$\dfrac{3^x(2^x-4)-(2^x-4)}{(x-5)\cdot(2^x-4)} \le 0$

$\dfrac{(2^x-4)(3^x-1)}{(2^x-4)\cdot(x-5)} \le 0$

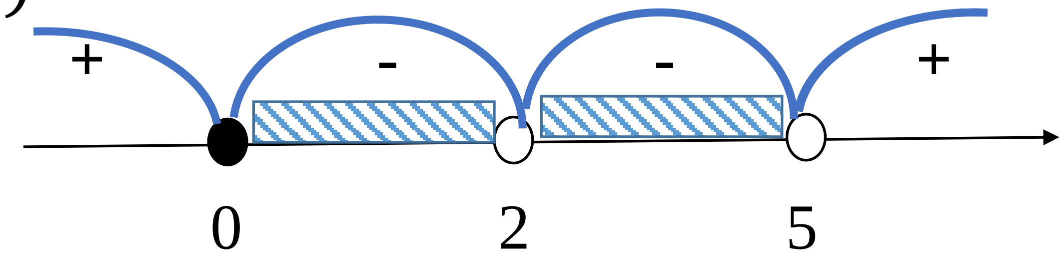
$\dfrac{(2^x-2^2)(3^x-3^0)}{(2^x-2^2)\cdot(x-5)} \le 0$

Метод рационализации: $a^f - a^g \le 0 \leftrightarrow (a-1)(f-g) \le 0$

$\dfrac{(2-1)(x-2)(3-1)(x-0)}{(2-1)(x-2)(x-5)} \le 0$

$\dfrac{2x(x-2)}{(x-2)(x-5)} \le 0 \quad |:2$

$\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-5)} \le 0$



Ответ: [0;2)U (2;5)

$$7)\ \frac{\sqrt{x+3}\,(8-2^{x^2+3})}{5^{x-2}-5^{x^2-2}} \le 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+3\ge 0; \Rightarrow \\ 5^{x-2}-5^{x^2-2}\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge -3 \\ x\neq 0,\ x\neq 1 \end{cases}$

1) x = -3 $\frac{\sqrt{-3+3}\,(8-2^{(-3)^2+3})}{5^{-3-2}-5^{(-3)^2-2}} = \frac{0\cdot(8-2^{12})}{5^{-5}-5^{-7}} = 0$ => x= -3 является решением

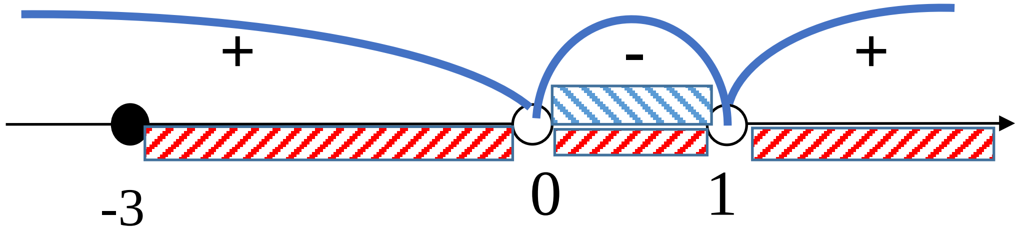
2) x > -3 => x+3>0 => разделим обе части на (x+3)

$$\frac{8-2^{x^2+3}}{5^{x-2}-5^{x^2-2}} \le 0 \qquad \frac{2^3-2^{x^2+3}}{5^{x-2}-5^{x^2-2}} \le 0$$

Метод рационализации: $a^f - a^g \le 0 \quad \leftrightarrow \quad (a-1)(f-g) \le 0$

$$\frac{(2-1)(3-x^2-3)}{(5-1)(x-2-x^2+2)} \le 0 \qquad \frac{-x^2}{4(x-x^2)} \le 0 \mid :4 \qquad \frac{x^2}{x^2-x} \le 0$$

$$\frac{x^2}{x(x-1)} \le 0$$



Ответ: (0;1) U {3}

Спасибо за внимание!